ΓΕΝΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE

Για $f \geq 0$ το ολοκλήρωμα της f ορίστηκε ως το "εμβαδό" μεταξύ γραφήματος της f και του άξονα των x, το οποίο είτε ήταν πεπερασμένο είτε άπειρο.
Αν έχαμε τώρα μια συνάρτηση που λαμβάνει και αρνητικές τιμές, λογικό είναι να ορίσαμε το ολοκλήρωμα με τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνει το άθροισμα των επιμέρους εμβαδών μεταξύ του γραφήματος της f και του άξονα $x'x$

Πρόβλημα

Μπορεί να έλθουμε αντιμέτωποι με τον υπολογισμό εμβαδών του είναι $+\infty - \infty$ και άρα να μην έχει νόημα η αφαίρεση.

Επίλυση

Θα επιλέξαμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $\int |f| < \infty$.

Μια τέτοιου είδους συνάρτηση θα τη λέμε ολοκληρώσιμη (κατά Lebesgue)

Παρατήρηση

Ο περιορισμός δεν είναι ποιοτικός (δηλ. υπερβολικός) αλλα ποσοτικός (δηλ. είναι μετρησιμη συνάρτηση που έχει ενα ποσοτικο χαρακτηριστικο).

$f^+ = \max\{f, 0\}$ θετικο μερος της f } θετικες
$f^- = -\min\{f, 0\}$ αρνητικο μερος της f } ποσότητες
(γραφικά)

Έτσι, εξ ορισμού:
$f := f^+ - f^-$ και $|f| := f^+ + f^-$

Έστω $A \in \mathcal{A}$ και $f \in \mathcal{M}(A)$ $(f: \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}})$

Ορισμός 1

Η f λέγεται <u>Lebesgue ολοκληρώσιμη</u> αν

$$\int_A |f| < \infty \Leftrightarrow \int_A f^+ + f^- < \infty \Leftrightarrow \int_A f^+ + \int_A f^- < \infty$$

$$\Leftrightarrow \int_A f^+ < \infty \text{ και } \int_A f^- < \infty.$$

Τότε η $f \in \mathcal{L}(A)$.

Ορισμός 2

Αν $f \in \mathcal{L}(A)$ τότε

$$\int_A f := \int_A f^+ - \int_A f^-$$

Παρατήρηση

Αν $f \in \mathcal{L}(A)$ (δηλ. $f \in \mathcal{M}(A)$ και $\int_A |f| < \infty$)
τότε $|f| \in \mathcal{L}(A)$ (δηλ. $|f| \in \mathcal{M}(A)$ και $\int_A ||f|| < \infty$)

απόδ.
προφανές

$$\int_A |f| < \infty \overset{\text{υπόθεση}}{\Rightarrow} \int_A f^+ + \int_A f^- < \infty \Rightarrow \int_A f^-, \int_A f^+ < \infty.$$

$\mathcal{L}^+(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει

Δηλ. αν $|f| \in \mathcal{L}(A) \not\Longrightarrow f \in \mathcal{L}(A)$

Έστω η συνάρτηση $\xrightarrow{}$ μη μετρ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \subset [0,1] \\ -1, & x \in [0,1] \setminus E \subset [0,1] \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι

$|f| = 1$ και $|f| \in m([0,1])$ αλλά

η $f \notin m([0,1])$ και κατά συνέπεια

η $f \notin \mathcal{L}([0,1])$ → Διότι το σύνολο:

$$f^{-1}((\sigma,+\infty)) = \{f > \sigma\} = \begin{cases} \emptyset, & \sigma \geq 1 \\ \mathbb{R}, & \sigma \leq -1 \\ E, & -1 < \sigma < 1 \end{cases}$$

Δίδαγμα

Δεν αρκεί μόνο να εξετάζαμε το $\int_A |f| < \infty$.

αλλά και τη μετρησιμότητα (δίοτι στο αντιπ. η $|f| \in m(A)$ αλλά $f \notin m(A)$).

Θα ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό με την εξής:

Πρόταση:

Αν $A \in \mathcal{A}$ και $f \in m(A)$ & $g \in \mathcal{L}^+(A)$ $|f|$ ε/ω

$|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in A \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(A)$

Απόδειξη

f^+ και $f^- \geq 0$ τότε

$$\begin{cases} 0 \le f^+ \le f^+ + f^- = |f| \le g \\ 0 \le f^- \le f^+ + f^- = |f| \le g \end{cases} \quad (1)$$

Αφού $f \in m(A) \Rightarrow f^+, f^- \in m(A)$ (2)
Επώ $g \in \mathcal{L}^+(A)$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\int_A f^+ \le \int_A g < \infty \text{ και } \int_A f^- \le \int_A g < \infty$$

Άρα, $\int_A f^+$ και $\int_A f^- < \infty$

Επομένως, $f^+, f^- \in \mathcal{L}^+(A) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(A)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Γνήσια Γραμμικότητα του ολοκληρώματος

Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε το $\mathcal{L}(A)$ είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ που η συνάρτηση $\int_A : f \longrightarrow \int_A f$ είναι γραμμική

Απόδειξη:

1) Για κάθε $f, g \in \mathcal{L}(A) \Longrightarrow f+g \in \mathcal{L}(A)$

αφού $|f+g| \le |f|+|g|$ και $|f|, |g| \ge 0$

$\int_A |f+g| \le \int_A |f| + \int_A |g| < \infty$ και θδο

$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$

$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$ ①

και $f = f^+ - f^-$ και $g = g^+ - g^- \Rightarrow$

$\Rightarrow f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \overset{①}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow$

$\Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$

ολοκληρώνουμε τα δύο θετικά μέλη και χρησιμοποιούμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις. Άρα, έπεται

$$\int_A (f+g)^+ + \int_A f^- + \int_A g^- = \int_A (f+g)^- + \int_A f^+ + \int_A g^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A (f+g)^+ - \int_A (f+g)^- = \int_A f^+ - \int_A f^- + \int_A g^+ - \int_A g^-$$

$$\Rightarrow \int_A f+g = \int_A f + \int_A g.$$

2) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{L}(A) \Rightarrow a \cdot f \in \mathcal{L}(A)$ αφού $a \cdot f \in m(A)$ και επίσης

$\int_A |af| = \int_A |a| \cdot |f| = |a| \cdot \int_A |f| < \infty$

(ή β' τρόπος από την πρόταση $(f \leq |f|)$
$f \in \mathcal{L}(A)$, $|a| \geq 0$ και $|f| \in \mathcal{L}^+(A)$ και
$|af| = |a| \cdot |f|$ τότε $af \in \mathcal{L}(A)$)

και ΝΔΟ $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$

• αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$

Έτσι, $\int_A \alpha f = \int_A (\alpha f)^+ - \int_A (\alpha f)^- = \alpha \cdot \int_A f$

• Αν $\alpha<0$ τότε $(\alpha f^{+})=-\alpha f^{-}$, $(\alpha f)^{-}=-\alpha f$

$$\int_A \alpha f=\int_A(\alpha f)^{+}-\int_A(\alpha f)^{-}\overset{-\alpha>0}{\underset{\text{θετ. ομογ.}}{=}}$$

$$=\int_A -\alpha f^{-}-\int_A -\alpha f^{+}=-\alpha\int_A f^{-}+\alpha\int_A f^{+}=$$

$$=\alpha\left(\int_A f^{+}-\int_A f^{-}\right)=\alpha\cdot\int_A f.$$

Πρόταση 16.25

Έστω $A\in\mathcal{A}$ και $(f_\nu)\downarrow$ του $\mathcal{L}^{+}(A)$ ε/ω $f_\nu\longrightarrow 0$ a.e. A τότε $\int_A f_\nu\longrightarrow 0$.

Πρόταση 16.26 (Έστω ότι ισχύει η ολική γραμμικότητα)

Έστω $(f_\nu)\uparrow$ του $\mathcal{L}^{+}(A)$ και $f_\nu\to f$ a.e. A τότε ισχύει $\int_A f_\nu\longrightarrow\int_A f$ $(f\in\mathcal{L}(A))$

Απόδειξη

Για κάθε $\mu,\nu\in\mathbb{N}$ ορίζουμε την ακολουθία

$a_{\mu,\nu}:=\int_A(f_\nu-f)\wedge\mu=\min\{\int_A(f_\nu-f),\mu\}$

Η οποία είναι αύξουσα ως προς μ και ν.

Αιτιολόγηση

Για σταθερό ν, $a_{\mu,\nu}:=b_\mu=\min\{B(\nu),\mu\}$

και $a_{\mu+1,\nu}:=b_{\mu+1}=\min\{B(\nu),\mu+1\}$

Προφανώς, $b_\mu\le b_{\mu+1}$

Για σταθερό μ, $a_{\mu,\nu}:=c_\nu=\min\{B(\nu),\mu\}$

και $a_{\mu,\nu+1}:=c_{\nu+1}:=\min\{B(\nu+1),\mu\}$ όπου $B(\nu+1)\le B(\nu)$ αφού η $(f_\nu)\uparrow$ και στο $m^{+}(A)$

Άρα, $c_\nu\le c_{\nu+1}$

Συνεπώς, ισχύει $\lim_\nu\lim_\mu a_{\mu,\nu}=\lim_\mu\lim_\nu a_{\mu,\nu}$

• $\lim_\nu\lim_\mu a_{\mu,\nu}=\lim_\nu\lim_\mu\int_A(f_\nu-f)\wedge\mu=$

$=\lim_\nu\int_A(f_\nu-f)=\lim_\nu\int_A f_\nu-\int f$ $(f\in m^{+}(A),\ f_\nu\le f)$

• $\lim_\mu\lim_\nu a_{\mu,\nu}=\lim_\mu\lim_\nu\int_A(f_\nu-f)\wedge\mu=$

16.30) Θεώρημα

Έστω $A \in \mathcal{A}$, τότε ισχύει:

i) Αν $f, g \in \mathcal{L}(A)$ τότε αν $f \leq g \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$

ii) Αν $f \in \mathcal{L}(A)$ τότε $|\int_A f| \leq \int_A |f|$

iii) Αν $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ μετρήσιμα $\subseteq A$ τότε αν $\lim \nu(A_\nu) = 0 \Rightarrow \lim \int_{A_\nu} f = 0$

iv) Αν (A_ν) μετρήσιμα $\subseteq A$ τότε $\sum \int_{A_\mu} f = \int_A f$

v) Αν $f \in \mathcal{L}(A)$ και $f = g$ a.e. A τότε $g \in \mathcal{L}(A)$ και $\int_A f = \int_A g$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $f = f^+ - f^-$ και $g = g^+ - g^-$

$f \leq g \Rightarrow f^+ - f^- \leq g^+ - g^- \Rightarrow$

$\Rightarrow f^+ + g^- \leq g^+ + f^- \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f^+ + \int_A g^- \leq \int_A g^+ + \int_A f^- \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f^+ - \int_A f^- \leq \int_A g^+ - \int_A g^- \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \int_A f \leq \int_A g.$

ii) $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\int_A f| \leq \int_A |f|$

iii) Εμφανές.

iv) $\int_A f^+ = \sum \int_{A_\mu} f^+$ και $\int_A f^- = \sum \int_{A_\mu} f^-$

αφού $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(A)$

$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = \sum \int_{A_\mu} f^+ - \sum \int_{A_\mu} f^-$ $\dfrac{\int_{A_\mu} |f_\mu^+| < \infty}{\int_{A_\mu} |f_\mu^-| < \infty.}$

$$= \sum \int_{A_\mu} (f^+ - f^-) = \sum \int_{A_\mu} f .$$

v) $f = g \Rightarrow f^+ - f^- = g^+ - g^- \Rightarrow \int_A f^+ - \int_A f^- = \int_A g^+ - \int_A g^- \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f = \int_A g.$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ Η' ΤΟΥ LEVI

Ας είναι $A \in \mathcal{A}$ και $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \uparrow$ μετρήσιμων συναρτήσεων του A και την $f_1^- \in \mathcal{L}(A)$ τότε
$\lim_\nu \int_{A_\nu} f = \int_\mu \lim f_\nu$.

Υπόδειξη

$f_\nu + f_1^- \geq f_1 + f_1^- = f_1^+ \geq 0$

τότε

$\int_A \lim f_\nu + \int_A f_1^- = \int_A (\lim f_\nu + f_1^-) = \lim_\nu \left(\int_A f_\nu - \int_A f_1^-\right) =$

$= \lim_\nu \int_A f_\nu + \int_A f_1^- \Rightarrow \int_A f_1^- < \infty.$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΛΗΜΜΑ Fatou)

Ας είναι $A \in \mathcal{A}$ και $(f_\nu) \in \mathcal{L}(A)$ τότε

i) Αν $f_\nu \geq 0 \ \forall \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A \liminf f_\nu \leq \liminf \int_A f_\nu$

ii) Αν $f_\nu \leq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A \limsup f_\nu \geq \limsup \int_A f_\nu$

Αποδ

i) Ορίζουμε $g_\mu := f_\mu \wedge f_{\mu+1} \wedge \dots \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$

- Η g_μ είναι αύξουσα $\Rightarrow g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_\nu \leq \dots$
- $g_\mu \in M(A)$
- $g_\mu \leq f_\nu \quad \nu \geq \mu \Rightarrow \int_A g_\mu \leq \int_A f_\nu \Rightarrow \int_A g_\mu \leq \inf \int_A f_\nu$
- $g_1^- = 0 \in \mathcal{L}(A)$

Άρα, από το Θεωρ. μονοτονης σύγκλισης

$\int_A \liminf f_\nu = \int_A \lim g_\mu = \lim \int_A g_\mu = \lim \left(\inf_{\nu \geq k} \int_A f_\nu\right)$

ii) Θεωρούμε αντί της (f_ν) την $(-f_\nu)$ και ομοίως.

Θεώρημα (Συγκλίσεως Lebesgue)

Εάν $A \in \mathcal{A}$, $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(A)$ τότε

$\exists g \in \mathcal{L}^+(A) : (|f_\nu| \le g, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $f_\nu \to f)$ α.ε. A

τότε $f \in \mathcal{L}(A)$ και $\int_A f = \lim \int_A f$

Αποδ.

$E := A \setminus \{x \in A : f_\nu(x) \to f(x)$ και $|f_\nu(x)| \le g(x), \nu \in \mathbb{N}\}$

είναι μηδενικό.

Θέτουμε

$h_\nu = f_\nu \, \chi_{A \setminus E}$ και $h = f \, \chi_{A \setminus E}$

τότε, $h_\nu \xrightarrow{\text{σημ}} h$ και $|h_\nu(x)| \le g(x) \ \forall x \in A$

Άρα, $|h| \le g \Longrightarrow h \in \mathcal{L}(A)$.

$$\int_A h + \int_A g = \int_A \liminf h_\nu + \int_A g =$$

$$= \int_A \liminf (h_\nu + g) \le \liminf \int_A \overset{\ge 0}{(h_\nu + g)} =$$

$$= \liminf \int_A h_\nu + \int_A g$$

Άρα

$$\int_A h \le \liminf \int_A h_\nu$$

$$\int_A h \ge \limsup \int_A h_\nu$$

$$\int_A h = \lim \int_A h_\nu$$

$$\int_A f = \lim \int_A f_\nu$$

ως εδώ η Θεωρία Lebesgue

Ορισμός

$\mathcal{L}_p(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid |f|^p \in \mathcal{L}(A) \}, \quad p \in [1, +\infty)$

με ημινόρμα:

$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R}$.

- $\|f\|_p \geq 0$,
- $\|af\|_p = |a| \cdot \|f\|_p$
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Έτσι, $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|, |g|\})^p =$

$= 2^p \cdot \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \Rightarrow \mathcal{L}_p(A)$ γραμμικός

Ορισμός

Ορίζουμε, $p, q \in (1, +\infty)$ με p και q συζυγείς όταν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Επίσης, $x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

Απόδ.

$S := \frac{1}{p} \left(\frac{x^p}{x^q} - 1 \right)$ και (ανισότητα Bernoulli)

$(1+S)^p \geq 1 + Sp \Rightarrow$

$1 + S \geq \frac{x^p}{x^{q/p}} \Rightarrow$

$1 + \frac{x^p}{p y^q} - \frac{1}{p} \geq \frac{x^p}{y^{q-1}} \Rightarrow$

$\frac{1}{q} + \frac{x^p}{p y^2} \geq \frac{x}{y^{q-1}} \Rightarrow$

$\frac{y^q}{q} + \frac{x^p}{p} \geq x \cdot y$

Αν $f \in \mathcal{L}_p(A)$ και $g \in \mathcal{L}_q(A)$, p, q συζυγείς

$$x := \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{και} \quad y = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

τότε

$$\frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

$$\text{τότε} \quad \frac{\int_A |f \cdot g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq 1 \Rightarrow \underbrace{\int_A |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q}_{}$$

Ανισότητα Hölder

Ανισότητα Minkowski

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \leq$$

$$\leq \int |f+g|^{p-1} \cdot (|f|+|g|) =$$

$$= \int |f+g|^{p-1} \cdot |f| + \int |f+g|^{p-1} \cdot |g| \overset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f|^p\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \cdot \left(\int |g|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int \left(|f+g|^p\right)^{1/p}\right)^{p/q} \cdot \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] =$$

$$= \left(\|f+g\|_p\right)^{p/q} \cdot \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$